

FSAB 1106 - séance 10

Transformées de Fourier Discrètes - Filtrage

G. Janssens, S. Brousmiche, J. Giard, J. Olszewska

Exercice Matlab

Considérez un signal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, $f_1 = 150$ Hz, $f_2 = 200$ Hz.

1. Echantillonnez $x(t)$ de manière à éviter le repli spectral. Tronquez le signal $x[n]$ obtenu de telle sorte que son spectre soit le plus proche possible de celui de $x(t)$ par un choix judicieux de la fréquence d'échantillonnage et du nombre d'échantillons de $x[n]$. Expliquez vos résultats.
2. Design d'un filtre passe-bas :
 - a. Calculez la réponse impulsionnelle théorique $h[n]$ d'un filtre passe-bas idéal permettant d'enlever la composante f_2 . Utilisez la transformée de Fourier discrète inverse du gabarit théorique donné à la figure 1.
 - b. Calculez ensuite cette réponse impulsionnelle à l'aide de Matlab pour une fréquence de coupure de $f_c = 175$ Hz. Discrétisez le gabarit avec un nombre de points suffisant et appliquez l'algorithme `ifft`. Comparez avec la réponse théorique
 - c. Tronquez le résultat pour différentes longueurs de la fenêtre de troncature. Comparez le spectre du filtre obtenu avec le gabarit de départ. Expliquez les effets de cette troncature sur le spectre. Qu'en déduisez-vous sur la qualité du filtre ?
 - d. Ce filtre est-il causal ? Qu'est ce que cela implique pour une utilisation pratique ?
 - e. Appliquez ce filtre passe-bas sur le signal $x[n]$ grâce à la fonction `conv`. Comparez le résultat du filtrage en temporel et en fréquentiel pour différentes longueurs de troncature. Vérifiez que l'on obtient bien un signal proche de $x[n] = \cos(2\pi F_1 n)$.
3. Design d'un filtre passe-haut :
 - Répétez toutes les étapes du point précédent pour un filtre passe-haut de même fréquence de coupure.
 - Comparez d'un point de vue mathématique les réponses impulsionnelles des filtres passe-bas et passe-haut et écrivez les relations qui permettent de passer de l'un à l'autre.
4. Filtrage d'un signal audio¹ :
 - Ouvrez le fichier `wav` avec la fonction `wavread`. Quelle est sa fréquence d'échantillonnage ? Affichez son spectre en 'fréquences vraies' (axe fréquentiel donné en Hz).
 - Adaptez vos filtres passe-bas et passe-haut à la nouvelle fréquence d'échantillonnage.
 - Appliquez-les au signal sonore de manière à dissocier la partition de basse et de saxophone et enregistrez-les sur les deux canaux stéréo d'un nouveau fichier `wav`. Ecoutez le résultat obtenu (`wavplay`). Affichez le spectre des deux canaux.
 - Amplifiez de manière indépendante les deux instruments (gain différent pour les deux canaux). Testez plusieurs possibilités.

¹Extrait de *Indiana* (Hanley, MacDonald) interprété par Don Byas (s) et Slam Stewart (b), Juin 1945

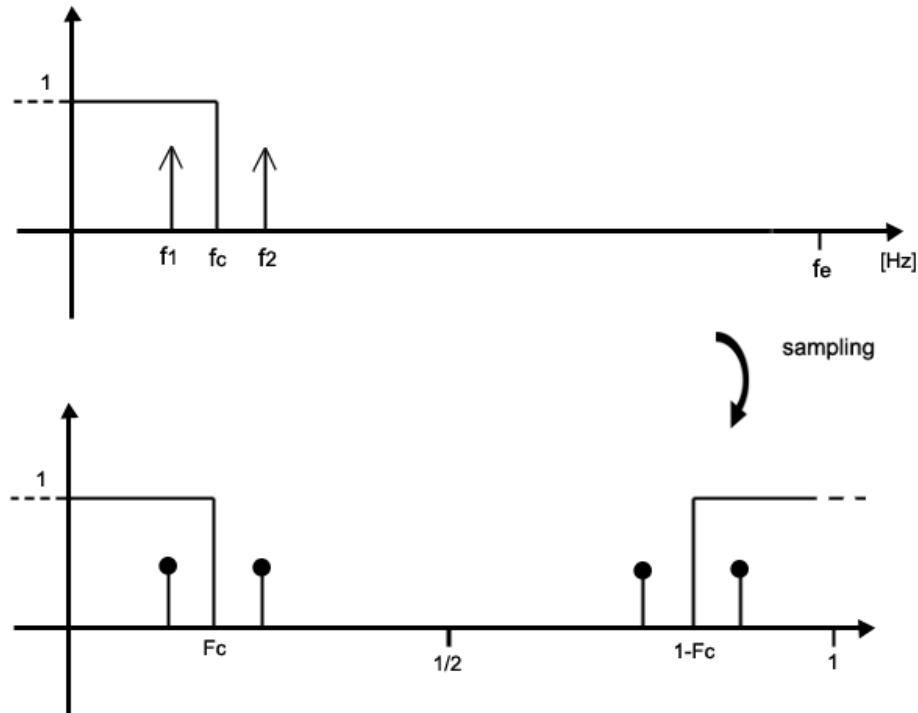


FIG. 1 – Gabarit d'un filtre passe-bas (analogique et discret)

5. [Bonus] Design des filtres passe-bas et passe-haut avec la méthode de Butterworth.
- Donnez les réponses en fréquence des filtres passe-bas de Butterworth d'ordre 1 et 2
 - Comparez ces deux réponses en fréquence.
 - Calculez $H(e^{j\Omega})$ en utilisant la fonction `butter`. Cette fonction va vous donner les coefficients du numérateur et du dénominateur de $H(e^{j\Omega})$. (remarque : les fréquences utilisées dans les fonctions MATLAB sont des fréquences normalisées par la moitié de la fréquence d'échantillonnage)
- `[num,den]=butter(ordre,freq);`
- $$H(e^{j\Omega}) = \frac{num(n).e^{-j\Omega(n-1)} + \dots + num(2).e^{-j\Omega} + num(1)}{den(m).e^{-j\Omega(m-1)} + \dots + den(2).e^{-j\Omega} + den(1)} \quad (1)$$
- Donnez l'équation de récurrence permettant de réaliser le filtrage, c'est-à-dire exprimez $Y[n]$ comme une fonction de $X[n-i]$ et de $Y[n-k]$ $\forall i, k$ (RAPPEL : une multiplication par $e^{j\Omega}$ en fréquentiel équivaut à un décalage dans le domaine temporel). Ce filtre est-il causal ? Pourquoi ?
 - Appliquez ces filtres à $x[n]$ en utilisant la fonction `filter` et comparez les résultats obtenus.