INMA2701
Mathématiques appliquées : signaux et systèmes

Transformée en z

N.B. Dans tout ce qui suit, $u[n]$ représente l'échelon unité

Exercice 1.
Une séquence finie $x[n]$ est définie par :

$$x[n] \begin{cases} \neq 0 & N_1 \leq n \leq N_2 \\ = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

où N_1 et N_2 sont finis. montrer que la ROC de $X(z)$ est le plan complexe tout entier sauf éventuellement $z = 0$ ou $z = \infty$.

Réponse exercice 1.

Si $N_1 \geq 0$ ROC $= \mathbb{C} \backslash \{z = 0\}$

Si $N_2 \leq 0$ ROC $= \mathbb{C} \backslash \{|z| = \infty\}$

Si $N_1 \leq 0$ et $N_2 \geq 0$ ROC $= \mathbb{C} \backslash \{z = 0, |z| = \infty\}$

Exercice 2.
Une séquence finie $x[n]$ est définie par :

$$x[n] = \{5,3,-2,0,4,-3\}$$

où la valeur -2 correspond à $n = 0$. Calculer $X(z)$ et la ROC.

Réponse exercice 2.

$X(z) = 5z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 3z^{-3}$

ROC $= 0 < |z| < \infty$

Exercice 3.
Calculer la transformée en z , $X(z)$, et esquisser la carte des pôles et zéros ainsi que la ROC pour chacune des séquences suivantes :

$$\begin{aligned} a)\ x[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \\ b)\ x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \\ c)\ x[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \end{aligned}$$

Réponse exercice 3.

$$\begin{array}{lll} (a) & X(z) = \dfrac{2z(z-5/12)}{(z-1/2)(z-1/3)} & |z| > 1/2 \\ (b) & X(z) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{z}{(z-1/2)(z-1/3)} & \dfrac{1}{3} < |z| < \dfrac{1}{2} \\ (c) & X(z) \text{ n'existe pas} & \end{array}$$

Exercice 4.
Calculer la transformée en z, $X(z)$, et la ROC pour chacune des séquences suivantes :

$$\begin{aligned} a)\ x[n] &= \delta[n-n_0] \\ b)\ x[n] &= u[n-n_0] \\ c)\ x[n] &= a^{n+1}u[n+1] \\ d)\ x[n] &= u[-n] \\ e)\ x[n] &= a^{-n}u[-n] \end{aligned}$$

Réponse exercice 4.

$$\begin{array}{lll} (a) & \delta[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} & \left\{ \begin{array}{ll} |z| > 0 & \text{si } n_0 > 0 \\ |z| < \infty & \text{si } n_0 < 0 \end{array} \right. \\ (b) & u[n-n_0] \longleftrightarrow \dfrac{z^{-(n_0-1)}}{z-1} & 1 < |z| < \infty \\ (c) & a^{n+1}u[n+1] \longleftrightarrow \dfrac{z^2}{z-a} & |a| < |z| < \infty \\ (d) & u[-n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-z} & |z| < 1 \\ (e) & a^{-n}u[-n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az} & |z| < \dfrac{1}{|a|} \end{array}$$

Exercice 5.
Vérifier la propriété suivante (équivalent discret de l'intégration) :

$$\mathcal{Z}\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

où $X(z)$ est la transformée en z de $x[n]$, avec comme ROC :

$$R' \supset R \cap \{|z| > 1\}.$$

Réponse exercice 5.

Observer que

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] * u[n]$$

Exercice 6.
Calculer la transformée en z inverse de :

$$X(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right) \qquad 0 < |z| < \infty$$

Réponse exercice 6.

Effectuer les produits pour obtenir

$$\begin{aligned} X(z) &= z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{5}{2} + z^{-1} \\ \Rightarrow x[n] &= \{\ldots,0,1,\frac{1}{2},-\frac{5}{2},1,0,\ldots\} \end{aligned}$$

où la valeur $-\frac{5}{2}$ *correspond à* $x[0]$

Exercice 7.
En utilisant la méthode de développement en séries de puissances, calculer la transformée en z inverse de :

$$\begin{aligned} a)\ X(z) &= \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \qquad |z| < \frac{1}{2} \\ b)\ X(z) &= \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

Réponse exercice 7.

(a) Puisque la ROC est l'intérieur d'un disque, le signal est à support fini à droite. Il faut donc obtenir un développement en puissances positives de z.

$$z = (1 - 3z + 2z^2)(z + 3z^2 + 7z^3 + 15z^4 + \ldots)$$

donc $x[n] = \{\ldots,15,7,3,1,0\}$ avec $x[0] = 0$.

(b) $x[n] = \{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\ldots\}$; $x[0] = 0$.

Exercice 8.
En utilisant le développement en fractions simples, calculer la transformée en z inverse de :

$$\begin{aligned} a)\ X(z) &= \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \qquad |z| < \frac{1}{2} \\ b)\ X(z) &= \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \qquad |z| < 1 \end{aligned}$$

Réponse exercice 8.

Autre méthode, même réponse, ou bien

$$\begin{aligned} (a)\ \ x[n] &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] u[-n-1] \\ (b)\ \ x[n] &= \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n] \end{aligned}$$

Exercice 9.
Calculer la transformée en z inverse de :

$$X(z) = \frac{2 + z^{-2} + 3z^{-4}}{z^2 + 4z + 3} \qquad |z| > 0$$

Réponse exercice 9.

$$\begin{aligned} x[n] = & \left[(-1)^{n-1} - (-3)^{n-1}\right] u[n-1] \\ & + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-3} - (-3)^{n-3}\right] u[n-3] \\ & + \frac{3}{2}\left[(-1)^{n-5} - (-3)^{n-5}\right] u[n-5] \end{aligned}$$

Exercice 10.
L'entrée $x[n]$ et la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système LTI discret sont données par :

$$x[n] = u[n] \qquad h[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Calculer la sortie $y[n]$ de ce système.

Réponse exercice 10.

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right) u[n]$$

Exercice 11.
La sortie $y[n]$ d'un système LTI discret vaut $2(\frac{1}{3})^n u[n]$ lorsque l'entrée vaut l'échelon-unité.

(a) Calculer la réponse impulsionnelle du système.
(b) Calculer la sortie de ce système lorsque l'entrée vaut $(\frac{1}{2})^n u[n]$.

Réponse exercice 11.

$$\begin{aligned} (a)\ \ h[n] &= 6\delta[n] - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \\ (b)\ \ y[n] &= \left[-6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n] \end{aligned}$$

Exercice 12.
Un système LTI discret et causal est décrit par :

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

où $x[n]$ et $y[n]$ sont l'entrée et la sortie.

a) Determiner la fonction de transfert $H(z)$.
b) Calculer la réponse impulsionnelle $h[n]$.
c) Calculer la réponse indicielle $s[n]$.

Réponse exercice 12.

$$(a)\ \ H[z] = \frac{z^2}{(z-1/2)(z-1/4)} \qquad |z| > 1/2$$

$$
\begin{aligned}
(b)\ \ h[n] &= \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] u[n] \\
(c)\ \ s[n] &= \left[\left(\frac{8}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] u[n]
\end{aligned}
$$

Exercice 13.
Résoudre les équations aux différences suivantes :

$$
\begin{aligned}
y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] &= (\frac{1}{3})^{n},\ \ y[-1] = 1 \\
3y[n] - 4y[n-1] + y[n-2] &= (\frac{1}{2})^{n},\ \ y[-1] = 1, y[-2] = 2
\end{aligned}
$$

Réponse exercice 13.

$$
\begin{aligned}
(a)\ \ y[n] &= 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \qquad n \geq -1 \\
(b)\ \ y[n] &= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \qquad n \geq -2
\end{aligned}
$$