

INMA 2731 : Processus stochastiques, estimation
et prédiction

M. Gevers et L. Vandendorpe

Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences Appliquées

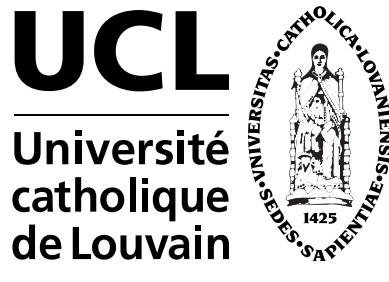


Table des matières

1	Probabilités et variables aléatoires	9
1.1	Probabilités	9
1.1.1	Evènements et expériences	9
1.1.2	Axiomes de probabilité	10
1.1.3	Indépendance statistique	10
1.1.4	Lois de composition	11
1.1.5	Probabilité a posteriori	11
1.2	Variable aléatoire	12
1.2.1	Variable aléatoire réelle à une dimension	13
1.2.2	Variable aléatoire réelle à plusieurs dimensions	17
1.2.3	Variable aléatoire complexe	23
1.2.4	Changement de variable : cas uni-dimensionnel	24
1.2.5	Changement de variable : cas multi-dimensionnel	27
1.2.6	Lois de probabilité importantes	31
2	Processus stochastiques et signaux aléatoires	37
2.1	Définition	37
2.1.1	Fonction de répartition et densité de probabilité	38
2.1.2	Indépendance	39
2.1.3	Fonction aléatoire en temps discret	39
2.2	Moments d'une fonction aléatoire	39
2.2.1	Moyenne	39
2.2.2	Variance, covariance	39
2.2.3	Covariance mutuelle	40
2.3	Stationnarité - ergodisme	40
2.3.1	Stationnarité	40
2.3.2	Ergodisme	43
2.4	Représentation spectrale	46
2.4.1	Densité spectrale de puissance	46
2.4.2	Effet d'un système linéaire sur une FA	48
2.4.3	Bruit blanc	51
2.4.4	Factorisation spectrale	52
2.5	Modèles de dimension finie	59
2.5.1	Le processus de Wiener	59

2.5.2	Processus auto-régressif (AR)	61
2.5.3	Processus à moyenne mobile (MA ou FIR)	63
2.5.4	Processus auto-régressif à moyenne mobile (ARMA)	64
2.5.5	Processus ARMAX	66
2.5.6	Processus de Box et Jenkins (BJ)	67
2.5.7	Processus Markovien et modèle d'état	67
3	Théorie de l'estimation	71
3.1	Position du problème	71
3.2	Propriétés des estimateurs	73
3.2.1	Biais d'un estimateur	73
3.2.2	Variance d'un estimateur	74
3.2.3	Erreur quadratique moyenne d'un estimateur	74
3.2.4	Estimateur efficace	74
3.2.5	Matrice d'information de Fisher et borne de Cramér-Rao	75
3.3	Notions de convergence stochastique	76
3.3.1	Convergence en probabilité	76
3.3.2	Convergence en moyenne quadratique	77
3.3.3	Convergence presque partout (ou avec probabilité 1)	77
3.4	Propriétés asymptotiques des estimateurs	77
3.4.1	Estimateur asymptotiquement non-biaisé	78
3.4.2	Estimateur asymptotiquement efficace	78
3.4.3	Estimateur asymptotiquement efficace et normal	78
3.5	Exemple : Estimation d'une résistance	78
3.6	Estimateurs de Bayes	81
3.6.1	Définition	82
3.6.2	Estimateur de la moyenne conditionnelle	83
3.6.3	Estimateur du maximum a posteriori (MAP)	83
3.6.4	Commentaires sur les estimateurs de Bayes	83
3.7	Estimateur du Maximum de Vraisemblance (ML)	84
3.7.1	Définition	84
3.7.2	Propriétés de l'estimateur du max. de vraisemblance	84
3.8	Estimateur linéaire à variance minimale	85
3.8.1	Définition	85
3.8.2	Propriétés de l'estimateur linéaire à variance minimale	85
3.9	Estimateur au sens des moindres carrés	85
3.9.1	Définition	86
3.9.2	Propriétés de l'estimateur des moindres carrés	86
3.10	Modèle linéaire et Gaussien	86
3.10.1	Estimateur Bayésien	86
3.10.2	Estimateur du maximum de vraisemblance	88
3.10.3	Estimateur des moindres carrés	88

4 Filtrage et prédiction	91
4.1 Introduction	91
4.2 Filtre de Wiener	92
4.2.1 Le filtre de Wiener FIR	93
4.2.2 Le prédicteur de Wiener FIR	99
4.2.3 Filtre de Wiener IIR non causal : lissage optimal	103
4.2.4 Filtre de Wiener IIR causal : filtrage optimal	105
4.3 Le filtre de Kalman	109
4.3.1 Formulation du problème d'estimation	110
4.3.2 Calcul du prédicteur de Kalman	112
4.3.3 Calcul du filtre de Kalman	119
4.3.4 Calcul du prédicteur de Kalman à horizon j	120
4.3.5 Le lissage optimal	121
4.3.6 Prédicteur de Kalman stationnaire	122
4.3.7 Modèle d'innovations entrée-sortie : le modèle ARMAX	124
4.3.8 Prédiction à l'aide de modèles ARMAX	126

Introduction

Ce cours créé en 1996 a pour objectif de donner aux étudiants une autre vue du traitement qui peut être appliqué à des signaux ou des systèmes. Dans les cours précédents (FSA 2700 : mathématiques appliquées), les signaux et systèmes considérés et modélisés sont supposés connus parfaitement (de manière déterministe). Or, dans de nombreux systèmes réels, les signaux à traiter ne peuvent être modélisés de la sorte. C'est le cas par exemple des signaux de télécommunications qui, par nature, ne sont pas connus de façon certaine, sinon ils ne véhiculeraient aucune information. C'est aussi le cas de nombreux signaux qui proviennent de mesures ou d'observations bruitées, qui font que le signal réellement observé est une forme corrompue du signal voulu. De ce fait, de nombreuses opérations de traitement de signal pensées pour des signaux déterministes doivent être repensées et optimisées en fonction de l'information dont on dispose à propos du signal à traiter. C'est l'objet de ce cours.

